

# Lösungen der Aufgaben

## Kapitel 2

### Aufgabe 2.3.1

Es gilt für die Z-Y-X-Euler-Winkel:  $A = 0^\circ, B = -30^\circ, C = 90^\circ$  (s. Bild L1).

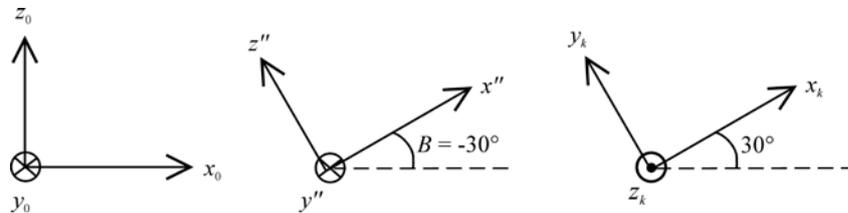


Bild L1: Euler-Winkel mit Zwischenergebnis

Die zu den Drehungen gehörenden Rotationsmatrizen nach Gl. (2.20) sind:

$${}^0_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1_2A = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & 0 & -\sin 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

$${}^k_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, {}^k_0A = {}^0_1A \cdot {}^1_2A \cdot {}^k_2A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Das Ergebnis  ${}^k_0A$  kann direkt durch Beschreibung der Einheitsvektoren  $x_k, y_k, z_k$  im Koordinatensystem  $K_0$  nachgeprüft werden.

### Aufgabe 2.3.2

Es gilt  $R = {}^z_R A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Die  $x$ -Achse des Zielkoordinatensystems zeigt in Richtung

der  $y$ -Achse des Referenzkoordinatensystems, da der erste Spaltenvektor von  ${}^z_R A$   $[0, 1, 0]^T$  beträgt. Entsprechend sind die Richtungen der beiden anderen Einheitsvektoren

festzulegen. Das Referenzkoordinatensystem wird beliebig in der Zeichenebene als Rechtssystem festgelegt (s. Bild L2).

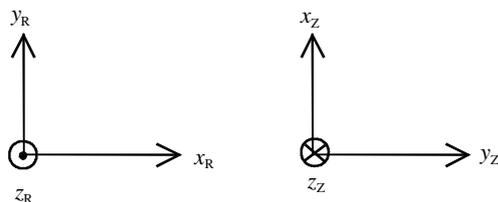


Bild L2: Lösung des ersten Teils der Aufgabe 2.3.2

Mit Gl. (2.19) erhält man für die Z-Y-Z-Euler-Winkel:

$$\beta = \arccos(-1) = \pm\pi, \quad \alpha = \arctan 2(0, 0) = 0, \quad \chi = \arctan 2(1, 0) = \pi/2 \quad .$$

Entsprechend kann man mit Gl. (2.22) die Z-Y-X-Euler-Winkel berechnen:

$$B = \arcsin(0) = 0, \quad A = \arctan 2(1, 0) = \pi/2, \quad C = \arctan 2(0, -1) = \pm\pi$$

Die Roll-Pitch-Yaw-Winkel erhält man durch Gl. (2.26):

$$\theta = \arcsin(0) = 0, \quad \psi = \arctan 2(0, -1) = \pi, \quad \phi = \arctan 2(1, 0) = \pi/2$$

Die Ergebnisse können durch Ausführung der Drehungen überprüft werden.

### Aufgabe 2.3.3

Nach Bild 2.17b und Gl. (2.31) wird  $\mathbf{v}_{s_2}$  zu

$$\mathbf{v}_{s_2} = \frac{d\mathbf{r}_{s_2}}{dt} = \frac{d^{(2)}\mathbf{p}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{s_2}$$

berechnet.  $\mathbf{v}_{s_2}$  wird nach der Zeit differenziert:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{s_2} = \dot{\mathbf{v}}_{s_2} &= \frac{d^2\mathbf{r}_{s_2}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{(2)}\mathbf{p}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{s_2} \right) = \\ &= \frac{d^{2,(2)}\mathbf{p}_2}{dt^2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{d^{(2)}\mathbf{p}_2}{dt} + \left( \frac{d^{(2)}\boldsymbol{\omega}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \right) \times \mathbf{r}_{s_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_{s_2}}{dt} \end{aligned}$$

Beachtet man Gl. (2.32) und setzt  $\frac{d\mathbf{r}_{s_2}}{dt}$  ein, erhält man:

$$\mathbf{b}_{s_2} = \dot{\mathbf{v}}_{s_2} = \frac{d^{2,(2)}\mathbf{p}_2}{dt^2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{d^{(2)}\mathbf{p}_2}{dt} + \frac{d^{(2)}\boldsymbol{\omega}_2}{dt} \times \mathbf{r}_{s_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_{s_2}$$

Wie im Beispiel in Abschn. 2.1.10 wird angenommen, dass sämtliche Vektoren im Koordinatensystem 2 zu

$$\mathbf{p}_2 = [0, 0, d_2]^T, \mathbf{s}_2 = [0, 0, -l_{s_2}]^T, \boldsymbol{\omega}_2 = [0, -\dot{\theta}, 0]^T$$

gegeben sind. Setzt man diese Werte ein, wird  $\mathbf{b}_{s_2}$  zu:

$$\mathbf{b}_{s_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{d}_2 - (d_2 - l_{s_2}) \cdot \ddot{\theta} \\ 0 \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}^2 \cdot (d_2 - l_{s_2}) \end{bmatrix}$$

Die Darstellung in  $K_0$  wird durch Multiplikation mit der Rotationsmatrix  ${}^2_0\mathbf{A}$  erreicht:

$$\mathbf{b}_{s_2}^{(0)} = {}^2_0\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_{s_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} \left( -2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{d}_2 - (d_2 - l_{s_2}) \cdot \ddot{\theta} \right) \cdot \sin \theta + \left( \ddot{d}_2 - \dot{\theta}^2 \cdot (d_2 - l_{s_2}) \right) \cdot \cos \theta \\ 0 \\ \left( 2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{d}_2 + (d_2 - l_{s_2}) \cdot \ddot{\theta} \right) \cdot \cos \theta + \left( \ddot{d}_2 - \dot{\theta}^2 \cdot (d_2 - l_{s_2}) \right) \cdot \sin \theta \end{bmatrix}$$

### Aufgabe 2.3.4

In der gezeichneten Stellung (Bild 2.22) nimmt der R6-12 die Winkel  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = -90^\circ$  ein. Die geforderte Zielstellung wird dadurch erreicht, dass man in Gedanken zuerst nur Gelenk 1 zur Zielstellung dreht und anschließend Gelenk 2. Gelenk 1 ist um  $-180^\circ$  zu drehen, dabei bewegen sich die Koordinatensysteme  $K_1$  und  $K_2$  mit (Zwischenstellung, Bild L3, links). Um die Zielstellung  $\theta_2 = -135^\circ$  zu erreichen, muss Gelenk 2 um  $-45^\circ$ , also in negativer Richtung der  $z_1$ -Achse, gedreht werden (s. Bild L3, rechts).

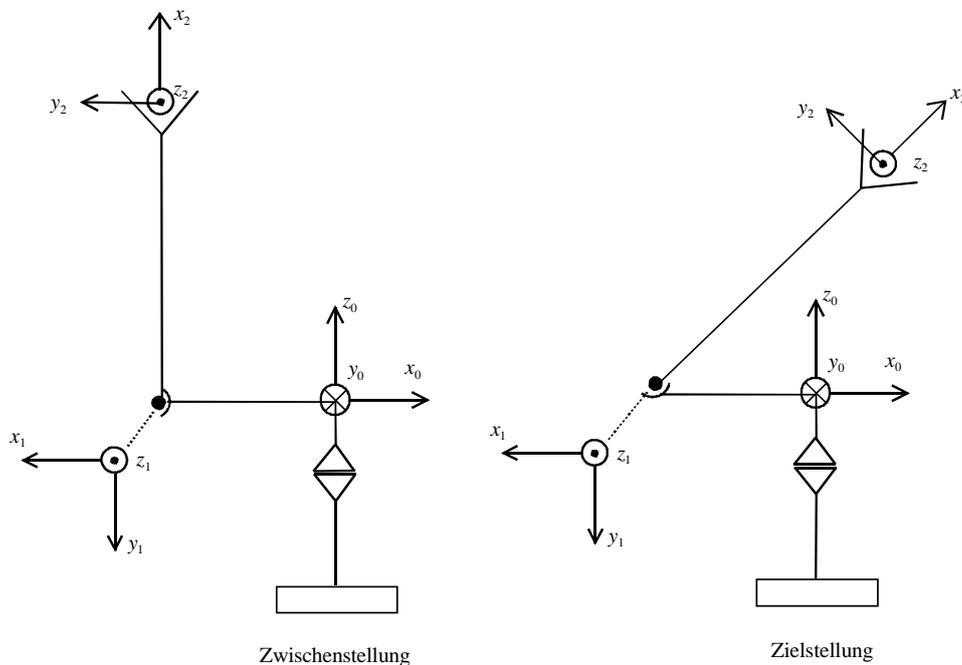


Bild L3: Lösung der Aufgabe 2.3.4

**Aufgabe 2.3.5**

In der rechts gezeichneten Stellung von Bild 2.24 kann die homogene Matrix direkt, ohne Gl. (2.35) zu nutzen, angegeben werden:

$$\mathbf{T}_w = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_3^{(0)} & \mathbf{y}_3^{(0)} & \mathbf{z}_3^{(0)} & \mathbf{p}_0^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Alternative ist die Anwendung der Gleichungen (2.34), (2.35):

$$\mathbf{T}_w(\theta_1 = \pi, \theta_2 = -\pi/2, d_3 = 0.5) = {}^0\mathbf{T}(\theta_1 = \pi) \cdot {}^1\mathbf{T}(\theta_2 = -\pi/2) \cdot {}^2\mathbf{T}(d_3 = 0.5) =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die Rotationsmatrix  ${}^0_3\mathbf{A}$  gilt:

$${}^0_3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_0^{(3)} & y_0^{(3)} & z_0^{(3)} \end{pmatrix} = {}^3_0\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} x_3^{(0)} & y_3^{(0)} & z_3^{(0)} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Teil:

Zu den Ortsvektoren wird eine 4. Komponente mit dem Wert 1 hinzugefügt.

$$\text{Es gilt } \mathbf{p}_H^{(0)} = \mathbf{T}_W(\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 0, d_3 = 0.5) \cdot \mathbf{p}_H^{(3)}, \quad \mathbf{p}_H^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 & -0.4 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Mit den konstanten Denavit-Hartenberg Parameter, die in Bild 2.24 angegeben sind und den angegebenen Gelenkkordinaten werden die Gleichungen (2.34) und (2.35) zur Berechnung verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_W(\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 0, d_3 = 0.5) &= {}^0_1\mathbf{T}(\theta_1 = \pi/2) \cdot {}^1_2\mathbf{T}(\theta_2 = 0) \cdot {}^2_3\mathbf{T}(d_3 = 0.5) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{p}_H^{(0)} = \mathbf{T}_W \cdot \mathbf{p}_H^{(w)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.25 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.5 \\ -1.1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Aufgabe 2.3.6

Variable Denavit-Hartenberg-Parameter und damit die Gelenkkordinaten sind  $q_1 = \theta_1$  und  $\theta_2$ . Nach der Denavit-Hartenberg-Konvention haben sie in der in Bild 3.5 abgebildeten Stellung die Werte  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = -90^\circ$ . Die konstanten Denavit-Hartenberg-Parameter sind:

$$d_1 = d_2 = 0, a_1 = l_1, a_2 = l_2, \alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ,$$

Um in die Stellung  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$  zu gelangen, muss Gelenk 2 um  $+90^\circ$  gedreht werden, also in positiver  $z_1$ -Richtung (Bild L4, links).

Um die Stellung  $\theta_1 = -45^\circ$ ,  $\theta_2 = 135^\circ$  zu erreichen, kann aus der Stellung  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = -90^\circ$  heraus entsprechend negativ um  $z_0$  mit  $-45^\circ$  und positiv um  $z_1$  mit  $225^\circ$  gedreht werden und man erhält die Stellung in Bild L4, rechts.

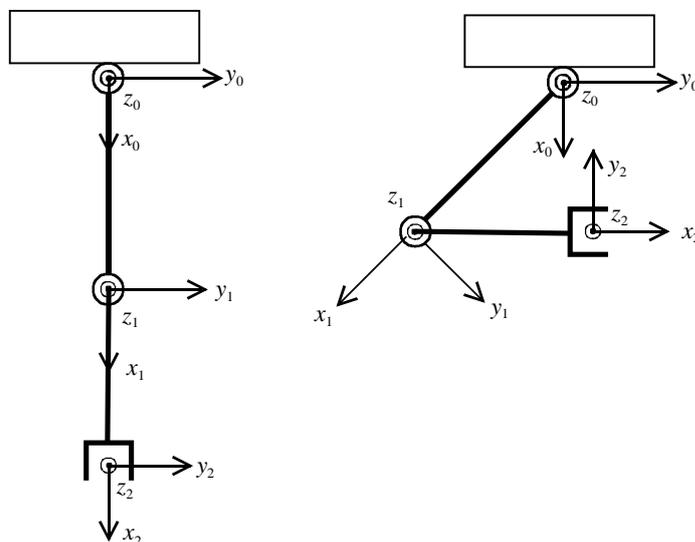


Bild L4: Zu Aufgabe 2.3.6: planarer Zweigelenkroboter in den geforderten Stellungen

### Aufgabe 2.3.7

Eine Möglichkeit, die Koordinatensysteme festzulegen, zeigt Bild L5. Alle Achsen des SCARA sind parallel. Die Koordinatensysteme  $K_0$  bis  $K_2$  liegen unabhängig von den Gelenkkordinaten auf derselben Höhe. Fallen die Ursprünge von  $K_2$  und  $K_3$  zusammen, so gilt, wie in der gezeichneten Stellung,  $d_3 = 0$ . Nachdem  $K_4$  und  $K_3$  festgelegt sind, ist darauf zu achten, dass nach der Regel auf den Seiten 40/41  $K_2$  und  $K_1$  auf derselben Höhe liegen müssen. Da der Ursprung von  $K_0$  irgendwo auf die erste Achse gelegt werden kann, ist es sinnvoll, auch diese Höhe zu wählen. Es ist zu beachten, dass die Denavit-Hartenberg-Regeln Freiheiten zulassen, und es deshalb mehrere Lösungen geben kann. Für die Denavit-Hartenberg-Parameter erhält man:

Gelenk	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	0	$l_1$	0
1	0	0	$l_2$	0
3	0	$d_3$	0	0
4	0	$l_4$	0	0

$\theta_1, \theta_2, d_3$  und  $\theta_4$  sind die variablen Gelenkkordinaten, sie sind für die gezeichnete Stellung angegeben. Die Vorwärtstransformation wird mit den Gln. (2.34), (2.35) für die gezeichnete Stellung durchgeführt:

$$T_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1+l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Vorwärtstransformation liefert das erwartete Ergebnis. Dies ist nur ein exemplarischer Test und natürlich keine vollständige Überprüfung der Richtigkeit.

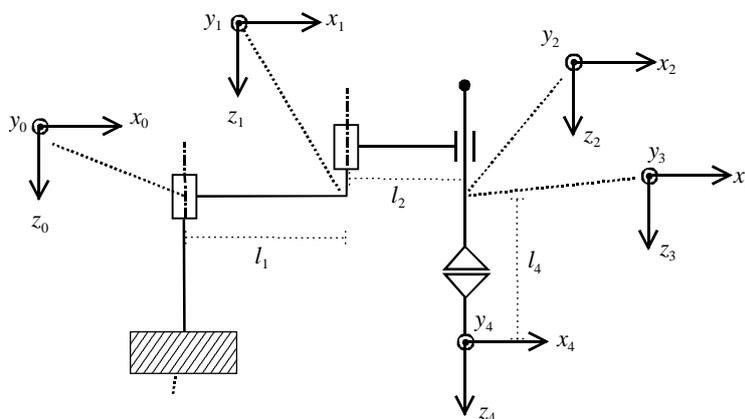


Bild L5: Zu Aufgabe 2.3.7: SCARA mit Koordinatensystemen nach D.-H.

### Aufgabe 2.3.8

Ausgehend von der Stellung aus Aufgabe 2.3.7 ( $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, q_3 = d_3, \theta_4 = 0$ ) wird um Gelenk 2 in positiver  $z_1$ -Richtung um  $90^\circ$  gedreht. Das Koordinatensystem  $K_4$  dreht sich mit und da keine weitere Drehung erfolgt, ergibt sich Bild L6. Das Schubgelenk bewegt sich in negativer  $z_3$ -Richtung um die Strecke  $-l_4$ , damit sind die Ursprünge von  $K_4$  und  $K_3$  deckungsgleich. Die Position des TCP wird damit zu  $\mathbf{p}^{(0)} = [l_1, l_2, 0]^T$ . Die Lösung für die Euler-Winkel kann aus den abgebildeten Koordinatensystemen  $K_0$  und  $K_4$  in Bild L6 abgelesen werden:  $A = 90^\circ, B = C = 0$ . Unabhängig von der Stellung des Roboters sind die Euler-Winkel  $B$  und  $C$  immer 0.

Zur Beschreibung durch Drehvektor und Drehwinkel wird zuerst die Rotationsmatrix  ${}^4_0\mathbf{A}$  für ( $\theta_1 = 0, \theta_2 = 90, q_3 = d_3, \theta_4 = 0$ ) aufgestellt. Dies kann mit direkter Sicht auf Bild L6 oder mit Gl. (2.32) und  ${}^4_0\mathbf{A} = {}^1_0\mathbf{A} \cdot {}^2_1\mathbf{A} \cdot {}^3_2\mathbf{A} \cdot {}^4_3\mathbf{A}$  vorgenommen werden. Es gilt:

$${}^4_0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit Gl. (2.29) gilt:

$$\begin{pmatrix} qt_1 \\ qt_2 \\ qt_3 \\ qt_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \cdot \operatorname{sgn}(2) \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ und mit Gl.(2.30):}$$

$$\varphi_R = 2 \cdot \arccos(0.5 \cdot \sqrt{2}) = 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 90^\circ, \quad \mathbf{e}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} / \sin(45^\circ) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Es muss}$$

also um  $z_0$  mit  $90^\circ$  gedreht werden um die Zielorientierung zu erhalten, was direkt aus Bild L6 ersichtlich ist.

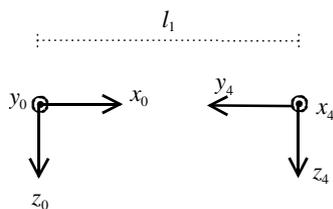


Bild L6: Zu Aufgabe 2.3.8:  $K_0$  und  $K_4$  des SCARA

## Kapitel 3

### Aufgabe 3.4.1

Die Aufgabe lässt sich mit Gl. (2.34) und Gl. (2.35) bzw. Gl. (3.2) lösen. Die konstanten Denavit-Hartenberg-Parameter aus Bild 2.24 sind zu verwenden und man erhält die allgemeine Lösung (beliebige Gelenkkordinaten):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_w = {}^3_0\mathbf{T} &= {}^1_0\mathbf{T}(\theta_1) \cdot {}^2_1\mathbf{T}(\theta_2) \cdot {}^3_2\mathbf{T}(d_3) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 & d_3 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 & d_3 \cdot (\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & -(d_3 \cdot \cos \theta_2 + l_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit den Werten  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = -45^\circ$ ,  $d_3 = 0.5 \text{ m}$  erhält man für  $\mathbf{T}_w$ :

$$\mathbf{T}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -(1+\sqrt{2}/4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit wird  $\mathbf{p}_0^{(0)} = [0, -\sqrt{2}/4, -(1+\sqrt{2}/4)]^T$ . Die Euler-Winkel werden ausgehend von  $\mathbf{T}_w$  mit Gl. (2.22) berechnet. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Rotationsmatrix  ${}^w_0\mathbf{R}$  die nordwestliche (3·3)-Matrix von  $\mathbf{T}_w$  ist:

$$\begin{aligned} B &= \arcsin(1/\sqrt{2}) = 45^\circ, A = \arctan 2(1/\sqrt{2}, 0) = 90^\circ, \\ C &= \arctan 2(0, -1/\sqrt{2}) = 180^\circ \end{aligned}$$

### Aufgabe 3.4.2

Mit den Gleichungen (3.5) bis (3.7) erhält man

$$\alpha = \arctan 2(0.2 \cdot \sqrt{2}, 0.3 + 0.2 \cdot \sqrt{2}) = 1.119 \hat{=} 64.1136^\circ$$

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 0.6478$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{l_1^2 + |\mathbf{p}|^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot |\mathbf{p}|}\right) = \arccos\left(\frac{0.4^2 + 0.6478^2 - 0.3^2}{2 \cdot 0.4 \cdot 0.6478}\right) = \pm 0.3336 \hat{=} \pm 19.1136^\circ$$

$$\chi = \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - |\mathbf{p}|^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}\right) = \arccos\left(\frac{0.4^2 + 0.3^2 - 0.6478^2}{2 \cdot 0.4 \cdot 0.3}\right) = \pm 2.3562 \hat{=} \pm 135^\circ$$

$$\text{positives Vorzeichen: } q_1 = \alpha - \beta = 0.7854 \hat{=} 45^\circ, \quad q_2 = \pi - \chi = 0.7854 \hat{=} 45^\circ$$

$$\text{negatives Vorzeichen: } q_1 = \alpha - \beta = 1.4526 \hat{=} 83.2271^\circ, \quad q_2 = \pi - \chi = 5.4978 \hat{=} 315^\circ$$

Beide Lösungen sind in Bild L7 grafisch dargestellt. Bei der negativen Lösung für  $q_2$  ist der Euler-Winkel A kleiner als bei der positiven Lösung.

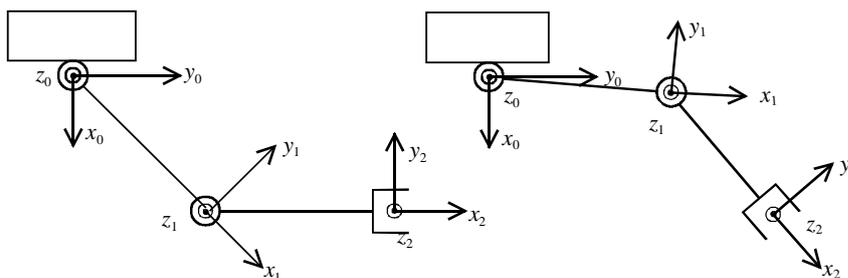


Bild L7: Zu Aufgabe 3.4.2: Zwei Lösungen für die Rückwärtstransformation

### Aufgabe 3.4.3

Der TCP kann sich nur in der  $x_0$ - $y_0$ -Ebene bewegen. Die Gelenkparameter sind  $q_1 = \theta_1$  und  $q_2 = d_2$ . Nach Bild 6.10 gilt jedoch:  $d_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ . In der gezeichneten Stellung ist der Drehwinkel 0. Aus Bild L8 ist ersichtlich, dass  $\theta_1 = q_1 = \arctan 2(-p_x^{(0)}, p_y^{(0)})$  gilt. Werden keine Bewegungsbeschränkungen betrachtet ist damit die Rückwärtstransformation gelöst. Die Lösungen sind eindeutig. Beispiel (s. auch Bild L8):  $p_x = -1.5, p_y = 1.5 \rightarrow q_1 = \theta = a \tan 2(1.5, 1.5) = 0.7854 \hat{=} 45^\circ$

Zusammenfassung:  $\theta_1 = q_1 = \arctan 2(-p_x^{(0)}, p_y^{(0)})$ ,  $d_2 = q_2 = \sqrt{(p_x^{(0)})^2 + (p_y^{(0)})^2}$

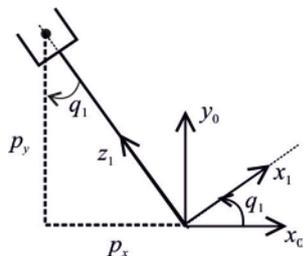


Bild L8: Zu Aufgabe 3.4.3: Zur Rückwärtstransformation des RT-Roboters

### Aufgabe 3.4.4

Es wird die Vorwärtstransformation betrachtet. Die Vorwärtstransformation wird nach Gl. (2.35) berechnet:  $\mathbf{T}_w = {}^0_0\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}(q_1 = \theta_1) \cdot {}^1_2\mathbf{T}(q_2 = d_2)$ . Mit den in Bild 6.10 angegebenen konstanten Denavit-Hartenberg-Parametern und Gl. (6.34) erhält man:

$$\mathbf{T}_w = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w^{(0)} & \mathbf{y}_w^{(0)} & \mathbf{z}_w^{(0)} & \mathbf{p}_0^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & -q_2 \cdot \sin q_1 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & q_2 \cdot \cos q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da nur der Roboterarm dem Effektor (nur) den Freiheitsgrad 2 verleihen kann, ist es sinnvoll als unabhängige voneinander vorgebbare kartesische Koordinaten  $p_x$  und  $p_y$  zu wählen. Mit  $p_x^{(0)} = -q_2 \cdot \sin q_1$  gilt:  $\dot{p}_x^{(0)} = -\dot{q}_2 \cdot \sin q_1 - q_2 \cdot \cos q_1 \cdot \dot{q}_1$ . Entsprechend gilt mit  $p_y^{(0)} = q_2 \cdot \cos q_1$ :  $\dot{p}_y^{(0)} = \dot{q}_2 \cdot \cos q_1 - q_2 \cdot \sin q_1 \cdot \dot{q}_1$ . Damit kann die reduzierte Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_{0,red}(\mathbf{q})$  aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x^{(0)} \\ \dot{p}_y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 \cdot \cos q_1 & -\sin q_1 \\ -q_2 \cdot \sin q_1 & \cos q_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{0,red}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

## Kapitel 4

### Aufgabe 4.5.1

Mit dem zurückzulegenden Winkelversatz und den geforderten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden nach Bild 4.7b die Bahnparameter berechnet:

$$\text{Gelenk 1: } v_{m1} = 1 < \sqrt{\pi \cdot 5 / 8} = 1.4012 \rightarrow t_{b1} = 0.4 \text{ s}, t_{v1} = 0.7854 \text{ s}, t_{e1} = 1.1854 \text{ s}$$

$$\text{Gelenk 2: } v_{m2} = 2 < \sqrt{3 \cdot \pi \cdot 8 / 8} = 3.07 \rightarrow t_{b2} = 0.5 \text{ s}, t_{v2} = 1.1781 \text{ s}, t_{e1} = 1.6781 \text{ s}$$

Zur Anpassung an die Interpolationsschrittweite müssen die Gleichungen (4.15) und (4.16) für die Sinoidenbahn angeschrieben werden:

$$t_b = \text{Ceil} \left( \frac{2 \cdot \hat{v}_m}{\hat{b}_m \cdot T_{-Ipo}} \right) \cdot T_{-Ipo}, \quad t_v = \text{Ceil} \left( \frac{s_e}{\hat{v}_m \cdot T_{-Ipo}} \right) \cdot T_{-Ipo}$$

$$b_m = \frac{2 \cdot v_m}{t_b}$$

und in Gl. (4.16)  $b_m = \frac{2 \cdot v_m}{t_b}$  verwendet werden. Mit der Anpassung an die Interpolationsschrittweite erhält man also folgende Bahnparameter:

$$\text{Gelenk 1: } t_{b1} = 0.4 \text{ s}, t_{v1} = 0.79 \text{ s}, t_{e1} = 1.19 \text{ s}, v_{m1} = 0.9942 / \text{s}, b_{m1} = 4.971 / \text{s}^2,$$

$$\text{Gelenk 2: } t_{b2} = 0.5 \text{ s}, t_{v2} = 1.18 \text{ s}, t_{e1} = 1.68 \text{ s}, v_{m2} = 1.9968 / \text{s}, b_{m2} = 7.987 / \text{s}^2$$

### Aufgabe 4.5.2

Über die Beziehung  $t_e = \frac{s_e}{v_m} + t_b = \frac{s_e}{v_m} + \frac{v_m}{b_m}$  kann entsprechend der Berechnung der syn-

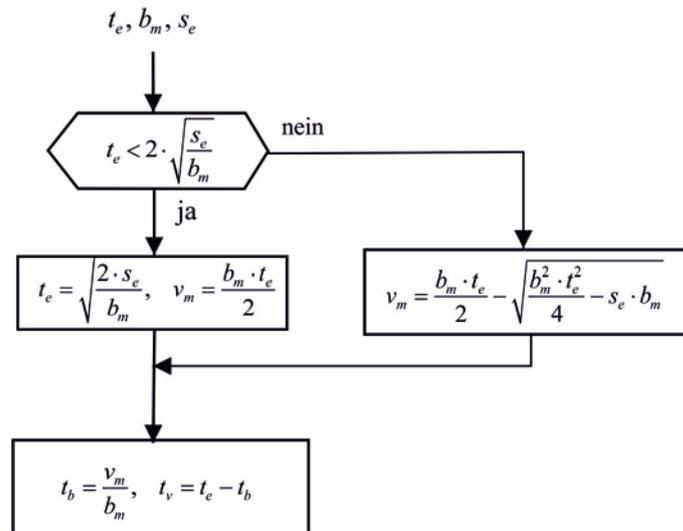
chronen PTP (Gl. 4.17) die Geschwindigkeit zu  $v_m = \frac{b_m \cdot t_e}{2} - \sqrt{\frac{b_m^2 \cdot t_e^2}{4} - s_e \cdot b_m}$  berechnet wer-

den. Zuerst muss jedoch geprüft werden, ob  $t_e$  nicht zu klein für die gegebene Beschleunigung und zu fahrende Strecke gewählt worden ist. Dies ist der Fall, wenn der Radikand bei

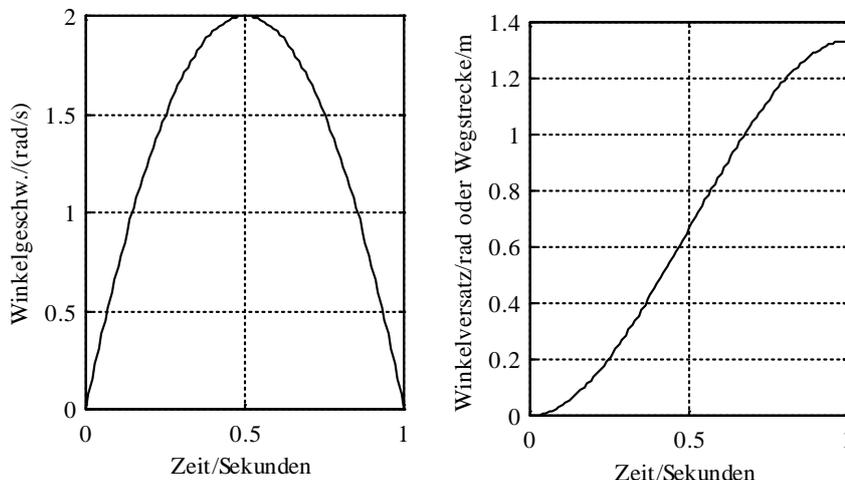
der Berechnung von  $v_m$  negativ wird. Gefahren kann die Bahn, wenn  $t_e > 2 \cdot \sqrt{\frac{s_e}{b_m}}$ . Ist dies

nicht der Fall, wird  $t_e$  auf den Grenzwert  $t_e = 2 \cdot \sqrt{\frac{s_e}{b_m}}$  korrigiert. In Bild L9 ist das voll-

ständige Flussdiagramm für die Berechnungen angegeben.

Bild L9: Zu Aufgabe 4.5.2: Flussdiagramm bei Vorgabe von  $t_e, b_m, s_e$ **Aufgabe 4.5.3**

Die Geschwindigkeit  $v(t) = \dot{s}(t)$  kann durch Integration der Beschleunigung und  $s(t)$  durch Integration der Geschwindigkeit gewonnen werden. Da hier angenommen wird, dass die Geschwindigkeit nach dem Bahnsegment zu 0 wird, muss zum Zeitpunkt  $t=1$  s die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu 0 werden. Für den Zeitbereich  $0 \leq t \leq 1$  s gilt für die Beschleunigung  $b(t) = 8 - 16 \cdot t$  und durch Integration für die Geschwindigkeit  $v(t) = 8 \cdot t - 8 \cdot t^2$ . Für die Wegstrecke/Winkelversatz gilt:  $s(t) = 4 \cdot t^2 - (8/3) \cdot t^3$ . Die maximale Geschwindigkeit muss bei  $t = 0.5$  s auftreten und beträgt 2. Bei  $t = 1$  s gilt:  $s(1) = s_e = 4/3$ . Das Bild L10, das mit Matlab ausgegeben wurde, zeigt den Verlauf von Geschwindigkeit und Weg.

Bild L10: Zu Aufgabe 4.5.3: Verlauf von  $v(t)$  und  $s(t)$ **Aufgabe 4.5.4**

- a) Für die Linearbewegung des TCP erhält man mit dem Rampenprofil

$$s_{ep} = |\mathbf{p}_Z^{(0)} - \mathbf{p}_{St}^{(0)}| = 0.285 \text{ m}, \quad v_{p,\max} = \sqrt{s_{ep} \cdot b_p} = 0.7549 \text{ m/s} \rightarrow v_p = v_{p,\max}$$

$$t_{bp} = 0.3774 \text{ s}, \quad t_{ep} = 0.7549 \text{ s}$$

Die geforderte Geschwindigkeit wurde von der Steuerung korrigiert.

Es wird hier angenommen, dass die Euler-Winkel als Z-Y-X-Euler-Winkel angegeben sind. Bei der Berechnung mit Quaternionen kann man an diesem einfachen Beispiel erkennen, dass man ausgehend von der Startorientierung um  $90^\circ$  in negativer Richtung von  $x_{6,St}$  drehen muss, um die Zielorientierung zu erhalten. Da die  $x_{6,St}$ -Richtung mit

der  $y_0$ -Richtung identisch ist, gilt:  $\mathbf{e}_R^{(0)} = (0 \ -1 \ 0)^T$ ,  $\varphi_R = \pi/2$ . Hier soll aber die Lösung schematisch, wie sie in einer Steuerung berechnet wird angeführt werden.

Zuerst werden auf Basis der Euler-Winkel die Rotationsmatrizen  ${}^{Sr}_0 \mathbf{A}$  und  ${}^Z_0 \mathbf{A}$  mit Gl.

(2.21) berechnet. Mit  $A_{Sr} = \pi/2$ ,  $B_{Sr} = 0$ ,  $C_{Sr} = \pi/2$  und  $A_Z = \pi/2$ ,  $B_Z = 0$ ,  $C_Z = 0$

$$\text{gilt: } {}^{Sr}_0 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^Z_0 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Zur Berechnung des Drehvektors und}$$

Drehwinkels wird  ${}^Z_{Sr} \mathbf{A}$  benötigt. Mit  ${}^Z_0 \mathbf{A} = {}^{Sr}_0 \mathbf{A} \cdot {}^Z_{Sr} \mathbf{A}$  folgt:

$${}^Z_0 \mathbf{A} = {}^{Sr}_0 \mathbf{A} \cdot {}^Z_{Sr} \mathbf{A} \rightarrow {}^Z_{Sr} \mathbf{A} = {}^0_{Sr} \mathbf{A} \cdot {}^Z_0 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(s. Auch Gl. (2.10) und Gl. (2.11)). Mit Gl. (2.29) gilt:

$$\begin{pmatrix} qt_1 \\ qt_2 \\ qt_3 \\ qt_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot \sqrt{2} \\ -0.5 \cdot \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_R = 2 \cdot \arccos(0.5 \cdot \sqrt{2}) = \pi / 2,$$

$$\mathbf{e}_R^{(Sr)} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} / \sin(\pi / 4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_R^{(Sr)} = {}^S_0\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_R^{(Sr)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es muss also mit der Geschwindigkeit  $v_w = 1.5 / \text{sec}$  und einer Beschleunigung von  $b_w = 3 / \text{sec}^2$  ein Winkel von  $\pi / 2$  zurückgelegt werden.

$$v_{w,\max} = \sqrt{(\pi / 4) \cdot 3} = 2.1708 > v_w. \text{ Damit:}$$

$$t_{bw} = \frac{v_w}{b_w} = 0.5 \text{ s}, \quad t_{vw} = \frac{s_{ew}}{v_w} = 1.0472 \text{ s}, \quad t_{ew} = t_{vw} + t_{bw} = 1.5472 \text{ s}$$

Da  $t_e = t_{ew} = 1.5472 \text{ s}$  gilt, muss die Geschwindigkeit  $v_p$  und damit auch die Bahnzeiten  $t_{bp}, t_{vp}$  nach Gl. (4.30) angepasst werden:

$$v_p = 0.1967 \text{ m/s}, \quad t_{bp} = 0.0984 \text{ s}, \quad t_{vp} = 1.4488 \text{ s}, \quad t_{ep} = 1.5472 \text{ s}$$

- b) Es soll  $t_e = 1 \text{ s}$  gelten. Sowohl  $v_w$  als auch  $v_p$  müssen nach der Formel von Gl. (4.29) bzw. Gl. (4.30) angepasst werden. Für die Linearbahn ist eine Fahrzeit von 1 Sekunde kein Problem. Für die Orientierungsänderung versuchen wir mit Gl. (4.29) mit  $b_w = 3 / \text{s}^2$  und  $t_e = 1 \text{ s}$  die Geschwindigkeit  $v_w$  entsprechend anzupassen. Der Radikand nach Gl. (4.29) wird aber negativ. Das heißt die Beschleunigung von  $b_w = 3 / \text{s}^2$  ist zu gering, sie muss erhöht werden, damit die Bahn in einer Sekunde gefahren werden kann. Eine Möglichkeit ist, den Radikanden zu 0 zu setzen und somit die notwendige Beschleunigung zu  $b_w = 4 \cdot s_{ew} / t_e^2 = 6.2832 / \text{s}$  zu berechnen. Die Geschwindigkeit wird dann nach Gl. (4.29) zu  $v_w = b_w \cdot t_e / 2 = 3.1416 / \text{s}$ . Die Bahnzeiten  $t_{bw} = t_{vw}$  können auf dieser Basis berechnet werden. Die Orientierungsänderung muss also geschwindigkeitsoptimal vorgenommen werden. Für die Linearbewegung ergibt sich das Problem nicht. Mit Gl. (4.30) kann die Geschwindigkeit zu  $v_p = 0.34426 \text{ m/s}$  berechnet werden, die Beschleunigung wird beibehalten.

**Aufgabe 4.5.5**

- a)  $r_{2,y} = r_{1,y} - 0.2 = -0.25$ . Die Hilfspunkte werden in die Mitte der jeweiligen Bahn gelegt. In Koordinaten von  $K_0$  sind die Ortsvektoren dann folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{St,1} = \mathbf{r}_1 &= [-0.5 \ -0.05 \ -0.95]^T, \mathbf{r}_{H,1} = [-0.5 \ -0.15 \ -1.05]^T, \mathbf{r}_{Z,1} = \mathbf{r}_2 = [-0.5 \ -0.25 \ -0.95]^T \\ \mathbf{r}_{St,2} = \mathbf{r}_2 &= [-0.5 \ -0.25 \ -0.95]^T, \mathbf{r}_{H,2} = [-0.5 \ -0.15 \ -0.85]^T, \mathbf{r}_{Z,2} = \mathbf{r}_1 = [-0.5 \ -0.05 \ -0.95]^T \end{aligned}$$

- b) Da der Vektor  $\mathbf{x}_C$  jeweils vom Startpunkt zum Zielpunkt zeigt,  $\mathbf{y}_C$  vom Mittelpunkt weg zeigt und in der Ebene des jeweiligen Kreisbogens liegen muss, kann für diesen einfachen Fall  $K_{C1}$  und  $K_{C2}$  direkt angegeben werden. Allerdings können auch die Gl. (4.31) benutzt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{C1}^{(0)} &= [0 \ -1 \ 0]^T, \mathbf{y}_{C1}^{(0)} = [0 \ 0 \ -1]^T, \mathbf{z}_{C1}^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{x}_{C2}^{(0)} &= [0 \ 1 \ 0]^T, \mathbf{y}_{C2}^{(0)} = [0 \ 0 \ 1]^T, \mathbf{z}_{C2}^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]^T \end{aligned}$$

Die homogenen Matrizen erhält man aus Gl. (4.32):

$$\begin{aligned} {}_{0}^{C1}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{C1}^{(0)} & \mathbf{y}_{C1}^{(0)} & \mathbf{z}_{C1}^{(0)} & \mathbf{r}_{St,1}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ -1 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & -1 & 0 & -0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ {}_{0}^{C2}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{C2}^{(0)} & \mathbf{y}_{C2}^{(0)} & \mathbf{z}_{C2}^{(0)} & \mathbf{r}_{St,2}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & 0 & -0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- c) Die zu fahrende Bahn bei einem Halbkreis ist  $s_{eC} = R \cdot \pi = 0.1 \cdot \pi$ . Es ist zuerst zu prüfen, ob die geforderte Geschwindigkeit korrigiert werden muss. Die Prüfung nach Bild 4.7b ergibt:  $v_C = 2 > \sqrt{0.1 \cdot \pi \cdot 5 / 2} = 0.88623 \text{ m/s}$ . Die Geschwindigkeit muss auf  $v_C = 0.88623 \text{ m/s}$  korrigiert werden. Ein Halbkreis soll also in  $t_{eC} = (0.1 \cdot \pi / 0.88623 + 2 \cdot 0.88623 / 5) \text{ s} = 0.70898 \text{ s}$  abgefahren werden. Die Gesamtzeit für beide Halbkreise ist dann  $t_{e,Ges} = 1.418 \text{ s}$ .

**Aufgabe 4.5.6**

Fünf Prozent der programmierten Geschwindigkeit sind  $v_{5\%} = 0.06 \text{ rad/s}$ . Das Überschleifen beginnt beim Anfahren auf den Zielpunkt. Das Überschleifen muss während der Bremszeit beginnen. Der Zeitpunkt kann mit Gl. (4.6) berechnet werden. Für die Bahnzeiten gilt:

$$t_b = v_m / b_m = 0.48 \text{ s}, t_e = s_e / v_m + t_b = 1.789 \text{ s}, t_v = 1.309 \text{ s}, t_e = 1.789 \text{ s}$$

Mit Gl. (4.6) ist dann der gefragte Zeitpunkt  $t^*$ :  $t^* = \frac{(v_m - v_{5\%})}{b_m} + t_v = 1.765 \text{ s}$

### Aufgabe 4.5.7

Für die Bahnsegmente gilt:

$$s_{e1} = \pi/4, v_{01} = 0, v_{e1} = 1 \text{ rad/s}, t_{e1} = 0.5 \text{ s}, \quad s_{e2} = \pi/4, v_{02} = 1 \text{ rad/s}, v_{e2} = 0, t_{e2} = 0.5 \text{ s}$$

Die Berechnung der Spline-Parameter erfolgt mit Gl. (4.57):

a) Bahnsegment 1:  $a_2 = (3 \cdot \pi - 2)/s^2 = 7.4248/s^2, a_3 = (-4 \cdot \pi + 4)/s^3 = -8.5664/s^3$

Bahnsegment 2:  $a_2 = (3 \cdot \pi - 4)/s^2 = 5.4248/s^2, a_3 = (-4 \cdot \pi + 4)/s^3 = -8.5664/s^3$

- b) Die Winkelbeschleunigung soll im ersten Bahnsegment konstant sein. Dann muss aber  $a_3$  im ersten Bahnsegment zu 0 werden (s. Gl. 4.55). Mit dieser Bedingung kann die Geschwindigkeit  $v_{e1}$  des ersten Bahnsegmentes, die bei der Durchfahrt durch  $q_b$  eingenommen wird, berechnet werden:

$$v_{e1} = \frac{2 \cdot s_{e1}}{t_{e1}} - v_{01} = 3.1416 \text{ rad/s}$$

Ausgehend von dieser Bedingung wird die konstante Beschleunigung im ersten Bahnsegment zu  $\ddot{s} = b_{10} = 2 \cdot a_2 = 6 \cdot s_{e1}/t_{e1}^2 - 2 \cdot v_{e1}/t_{e1} = 6.2832 \text{ rad/s}^2$  und die Geschwindigkeit steigt linear mit  $v_1(t) = 2 \cdot a_2 \cdot t = 6.2832 \text{ rad/s}^2 \cdot t$ .

Im zweiten Bahnsegment muss abgebremst werden, um die Geschwindigkeit von  $v_{02} = 3.1416 \text{ rad/s}$  auf  $v_{e2} = 0$  zu bringen.  $a_2, a_3$  werden neu zu  $a_2 = -3.1416 \text{ rad/s}^2$  und  $a_3 = 0$  berechnet. Damit ist aber im zweiten Bahnsegment auch die Beschleunigung konstant:  $b_{20} = -b_{10} = -6.2832 \text{ s}$ . Die Geschwindigkeit wird zu

$$v_2(t) = v_{02} - 2 \cdot a_2 \cdot t = 3.1416 \cdot (1 - 2 \cdot t) \text{ rad/s}^2$$

Damit hat man das Fahrprofil einer geschwindigkeitsoptimalen Bahn nach Bild 4.6 von  $q_A$  nach  $q_C$  erhalten (s. Bild unten)

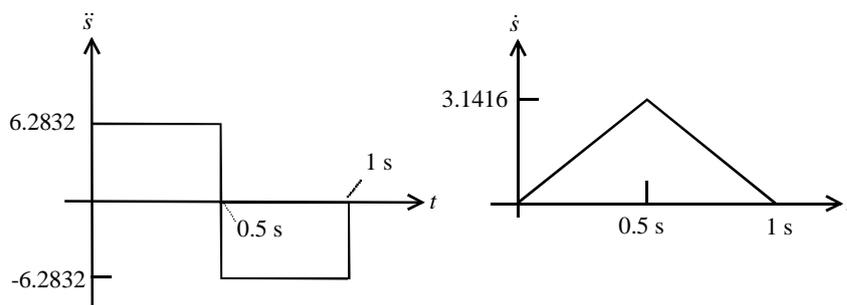


Bild L11: Zu Aufgabe 4.5.7b: Profil der Bahn bei konst. Beschleunigung in Bahnsegment 1

- c) Bild L12 zeigt die Verhältnisse für die in a) berechnete Spline-Bahn. Unten rechts ist zum Vergleich das Geschwindigkeitsprofil einer PTP-Rampenbahn geplottet, wobei die Bewegung im Punkt  $q_C$  kurz ruhen muss.

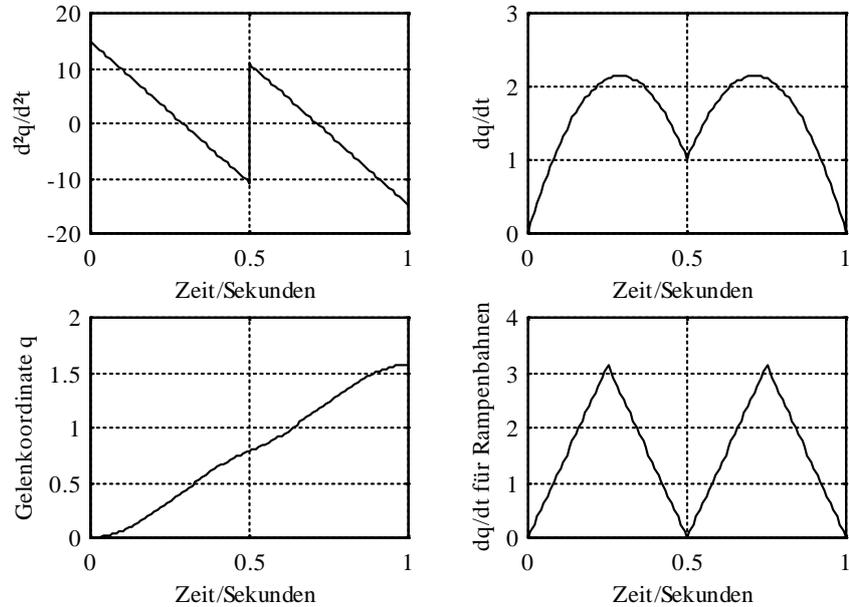


Bild L12: Zu Aufgabe 4.5.7c: Profil der Spline-Bahn von a)

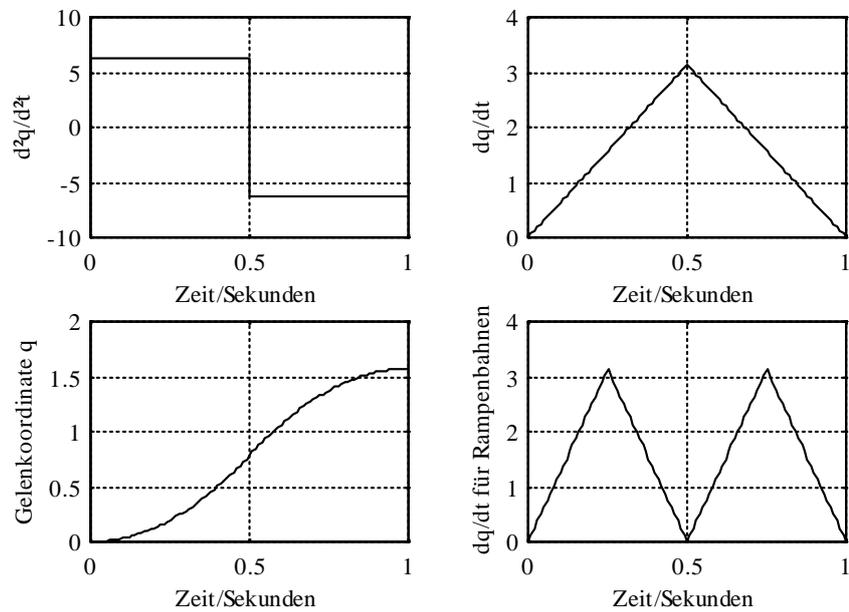


Bild L13: Zu Aufgabe 4.5.7c: Profil der Spline-Bahn von b)

**Aufgabe 4.5.8**

Bahnsegment 1:  $t_{e1} = 0.5\text{s}$ ,  $v_{01} = 0$ ,  $|v_{e1}| = 1\text{m/s}$ . Da der Geschwindigkeitsvektor im Zwischenpunkt vom Startpunkt zum Zielpunkt zeigt, muss gelten:

$$\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02} = \frac{(\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_A)}{|\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_A|} \cdot |v_{e1}| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit können für die beiden Bahnsegmente mit den vorhandenen Angaben die Parameter der Spline-Bahn berechnet werden:

Bahnsegment 1:

$$t_{e1} = 0.5\text{s}, \mathbf{v}_{01} = \mathbf{0}, v_{e1} = (1 \ 0 \ 0)^T \text{m/s} \Rightarrow \mathbf{a}_0 = \mathbf{p}_A = (0.8 \ 0 \ 0.4)^T \text{m},$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_{01} = \mathbf{0}, \mathbf{a}_2 = (0.4 \ 0 \ 2.4)^T \text{m/s}^2, \mathbf{a}_3 = (0.8 \ 0 \ -3.2)^T \text{m/s}^3$$

Bahnsegment 2:

$$t_{e2} = 0.5\text{s}, \mathbf{v}_{02} = v_{e1} = (1 \ 0 \ 0)^T \text{m/s}, v_{e2} = \mathbf{0}, \Rightarrow \mathbf{a}_0 = \mathbf{p}_B = (1 \ 0 \ 0.6)^T \text{m},$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_{02} = (1 \ 0 \ 0)^T \text{m/s}, \mathbf{a}_2 = (-1.6 \ 0 \ -2.4)^T \text{m/s}^2, \mathbf{a}_3 = (0.8 \ 0 \ 3.2)^T \text{m/s}^3$$

In Kap. 4, Bild 4.27, wurde dieses Beispiel schon behandelt und das Ergebnis dargestellt. Man erkennt, dass der zurückgelegte Weg natürlich länger ist, im Vergleich zur Fahrt mit zwei Linearbahnen, aber nicht im Zwischenpunkt angehalten und wieder angefahren werden muss, auch für den Energieverbrauch ist dies von Vorteil.

Nun soll bei Beibehaltung aller anderen Vorgaben die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02}$  vom Zwischenpunkt zum Zielpunkt zeigen, also  $\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T \text{m/s}$ . Bild L14 zeigt das von *spline\_ord3\_CP* geplottete Ergebnis (im Plot wird die Richtung vom Zwischenpunkt zum Zielpunkt „Richtung 0“ genannt). Bei geeigneter Wahl der Geschwindigkeitsvektoren ist es also bei Splines möglich, einen Punkt auf einer Geraden anzufahren.

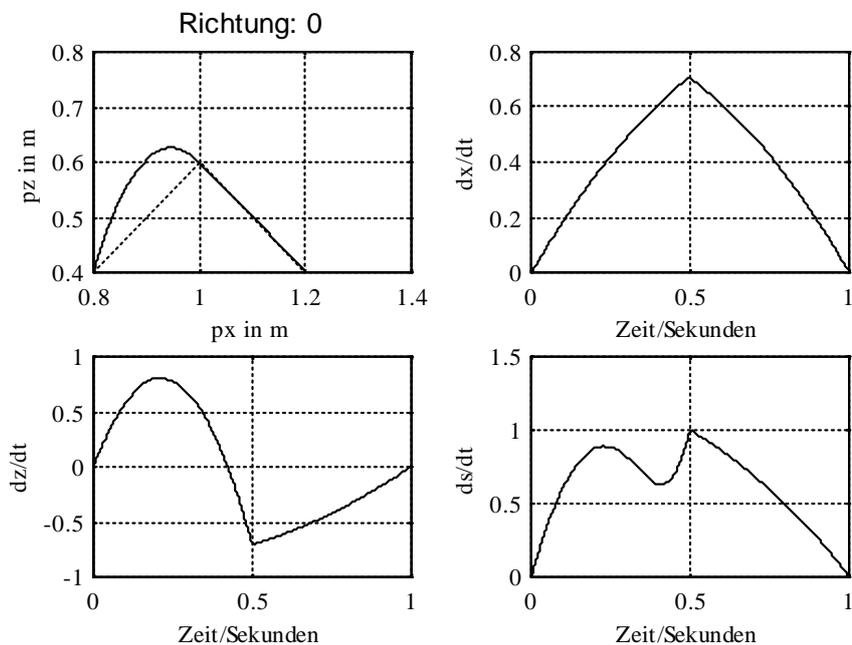


Bild L14: Zu Aufgabe 4.5.8

**Aufgabe 4.5.9**

Die Vektoren  $\mathbf{p}_A = (0.8, 0, 0.4)^T$ ,  $\mathbf{p}_B = (1, 0, 0.6)^T$ ,  $\mathbf{p}_C = (1.2, 0, 0.4)^T$ ,

$\mathbf{v}_{01} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02} = (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{v}_{e2} = \mathbf{0}$  und  $t_{e1} = t_{e2} = 0.5$ s werden übernommen. Zusätzlich werden die Beschleunigungsvektoren zu  $\mathbf{b}_{01} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b}_{e1} = \mathbf{b}_{02} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b}_{e2} = \mathbf{0}$  festgelegt.

Für das erste Bahnsegment erhält man mit den Gleichungen (4.68) und (4.69):

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{p}_A = (0.8, 0, 0.4)^T \text{ m}, \mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_{01} = \mathbf{0}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_{01} / 2 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{a}_3 = (0, 0, 16)^T \text{ m/s}^3, \mathbf{a}_4 = (-20, 0, -48)^T \text{ m/s}^4, \mathbf{a}_5 = (-9.6, 0, 38.4)^T \text{ m/s}^5$$

Bild L15 zeigt das von `spline_ord5_CP` bereitgestellte Ergebnis für

$$\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02} = (1, 0, 0)^T \text{ m/s} \text{ und Bild L16 das Ergebnis für}$$

$$\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T \text{ m/s. Der Verlauf der Spline-Bahn mit quintischen Splines}$$

ist im Vergleich zum Verlauf mit kubischen Splines weiter von der direkten Verbindung der Punkte entfernt, da die Beschleunigung bei den quintischen Splines in allen Punkten zu 0 gesetzt ist, während bei den kubischen Splines schon bei Start ein Beschleunigungsvektor von  $2 \cdot \mathbf{a}_2$  (das ist bei  $\mathbf{v}_{e1} = (1, 0, 0)^T$  m/s ein Beschleunigungsvektor von

$\ddot{\mathbf{p}}(t=0) = 2 \cdot \mathbf{a}_2 = (0.8 \ 0 \ 4.48)^T \text{ m/s}^2$ ). Dadurch braucht die Fahrt mit quintischem Spline einen längeren Weg, um in 0.5 Sekunden die geforderte geschwindigkeit im Zwischenpunkt zu erreichen.

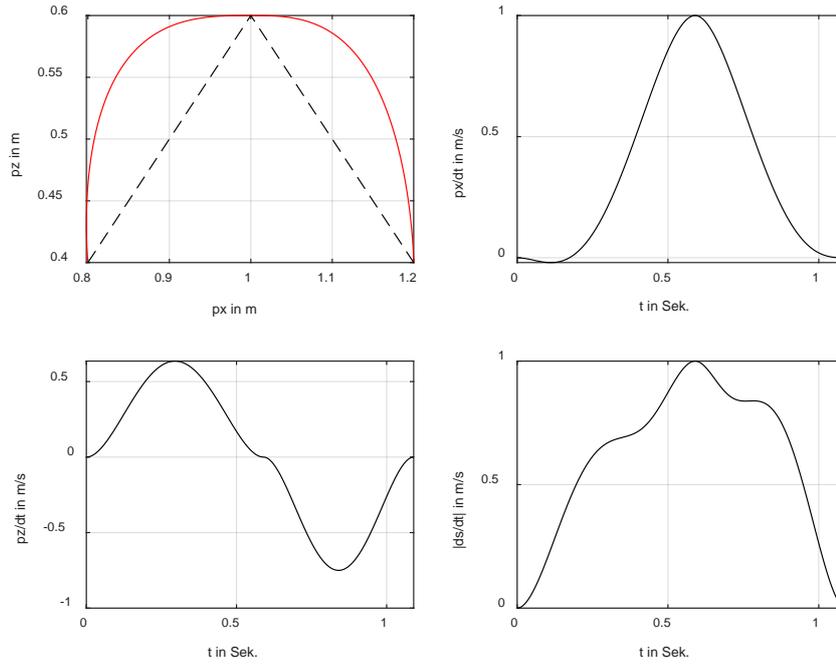


Bild L15: Zu Aufgabe 4.5.9: Profil der quintischen CP-Spline-Bahn bei  $\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02} = (1 \ 0 \ 0)^T$

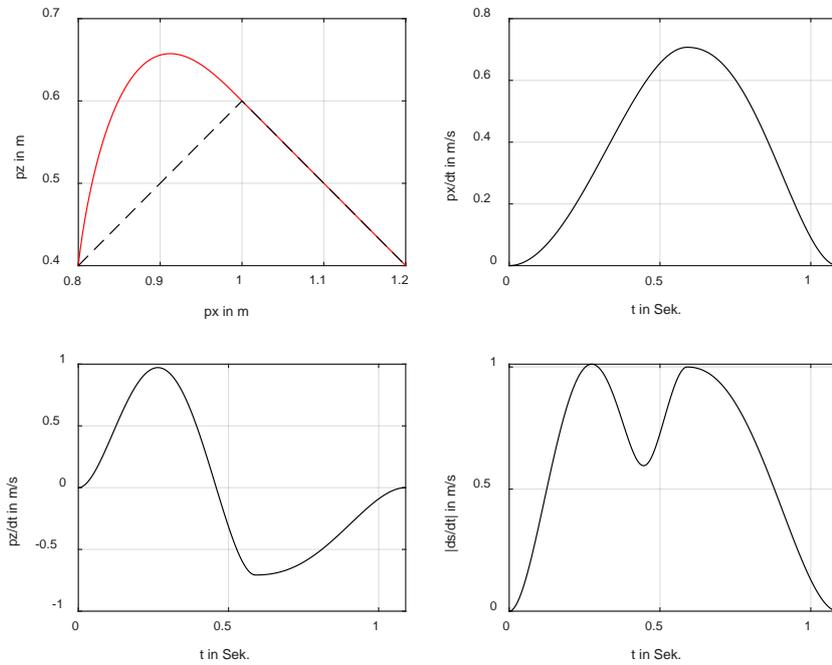


Bild L16: Zu Aufgabe 4.5.9: Profil der quintischen CP-Spline-Bahn bei

$$\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{e2} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$$

## **Kapitel 5**

Die Lösungen werden in Kürze bereitgestellt.

## Kapitel 6

### Aufgabe 6.4.1

- a) Die Anfangsbedingungen sind:  $\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_0 = (0 \quad g \quad 0)^\top$ . Für die Vektoren  $\mathbf{p}_1$  und  $\mathbf{s}_1$  gilt:  $\mathbf{p}_1 = (0.8 \quad 0 \quad 0)^\top$ ,  $\mathbf{s}_1 = (-0.2 \quad 0 \quad 0)^\top$ . Die Gelenkgröße  $q_1 = \theta_1$  wird hier zuerst auch symbolisch mitgeführt. Die Rotationsmatrix  ${}^1_0\mathbf{A}$  kann durch direkte Sicht angegeben werden oder wird mit  $\alpha_1 = 0$  nach Gl. (2.33) berechnet.

$${}^1_0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0_1\mathbf{A} = ({}^1_0\mathbf{A})^\top = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 \\ -\sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_{s1}$  werden nicht berechnet, da diese Größen nicht zur Berechnung von  $\tau = \tau_1$  benötigt werden. Die kinematischen Berechnungen ergeben nach Gl.(6.32):

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} \sin(q_1) \cdot g - 0.8 \cdot \dot{q}_1^2 \\ \cos(q_1) \cdot g + 0.8 \cdot \ddot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{s1} = \begin{pmatrix} \sin(q_1) \cdot g - 0.6 \cdot \dot{q}_1^2 \\ \cos(q_1) \cdot g + 0.6 \cdot \ddot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.145 \\ 6.705 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Kräfte/Drehmomente ergibt:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \cdot g \cdot \sin(q_1) - m_1 \cdot 0.6 \cdot \dot{q}_1^2 \\ m_1 \cdot g \cdot \cos(q_1) + m_1 \cdot 0.6 \cdot \ddot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \cdot \ddot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \cdot g \cdot 0.6 \cdot \cos(q_1) + m_1 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot \ddot{q}_1 + 0.5 \cdot \ddot{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 65.868_1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = n_{1z} = 65.868 \text{ Nm}$$

Man kann die Lösung auch mit dem Programm N\_E\_2G erhalten, wenn ein fiktives zweites Armteil der Masse (und Trägheit) 0 angesetzt wird mit  $\dot{q}_2 = \ddot{q}_2 = 0$ .

- b) Ausgehend von Bild 6.14 wird freigeschnitten und der Drehimpulserhaltungssatz auf das Gelenk angewandt. Zuerst muss jedoch das Trägheitsmoment  $M = J_L$  um das Gelenk mit dem Satz von Steiner berechnet werden:

$$M = I_{zz,1} + m_1 \cdot 0.6^2 = 6.26$$

Durch Freischneiden erhält man:

$$M \cdot \ddot{q}_1 = \tau - m_1 \cdot g \cdot 0.6 \cdot \cos q_1 \Rightarrow \tau = M \cdot \ddot{q}_1 + m_1 \cdot g \cdot 0.6 \cdot \cos q_1 = 65.86$$

c) Lösungsmöglichkeit mit Freischneiden:

$$(M + m_L \cdot 0.8^2) \cdot \ddot{q}_1 = \tau - m_1 \cdot g \cdot 0.6 \cdot \cos q_1 - m_L \cdot g \cdot 0.8 \cdot \cos q_1 \Rightarrow \tau = 89.24$$

2. Möglichkeit:

Newton-Euler-Verfahren mit neuer Masse  $m_1 = 20$ , neuer Schwerpunktskomponente  $s_{1,x} = -(0.8 - (16 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.8) / 20) = -0.16$  und neuer Trägheitskomponente  $I_{zz,1}$  im Schwerpunkt. Da ursprüngliche Masse und Lastmasse im Gelenk dasselbe Massenträgheitsmoment wie die neue Masse mit neuem Schwerpunkt hervorrufen müssen, gilt:  $I_{zz,1} = (0.6)^2 \cdot 16 + (0.8)^2 \cdot 4 + 0.5 - (0.64)^2 \cdot 20 = 0.628$ . Setzt man die neuen Werte ein, erhält man das Ergebnis ebenfalls.

3. Möglichkeit:

Es wird das Newton-Euler-Verfahren mit einem fiktiven Zweigelenkroboter gerechnet:

$$q_2 = \dot{q}_2 = \ddot{q}_2 = 0, \mathbf{p}_2 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{I}_{sp,2} = \mathbf{0}, m_2 = 4, {}^2_1\mathbf{A} = {}^1_2\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Man kann die Probe mit dem Programm N\_E\_2G machen.

d) Nur  $f_{ex,y}^{(1)}$  und  $n_{ex,z}^{(1)}$  können die Bewegung beeinflussen. Alle anderen Komponenten wirken nur auf das Gelenklager.

### Aufgabe 6.4.2

a) Die Elemente der Systemmatrizen werden in der Form von Gl. (6.38) als  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})$  dargestellt. Das Element  $M_{11}$  erhält man durch die Summe der Koeffizienten von  $\ddot{q}_1$  in  $\tau_1$ ,  $M_{12}$  durch die Summe der Koeffizienten in  $\tau_1$ ,  $M_{22}$  als Summe der Koeffizienten von  $\ddot{q}_2$  in  $\tau_2$ . Es gilt für die Massenmatrix:  $M_{21} = M_{12}$ .  $G_1$  bzw.  $G_2$  sind Terme in  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$ , die weder multiplikativ mit Gelenkgeschwindigkeiten oder Gelenkbeschleunigungen verknüpft ist. Nach einigen Umformungen erhält man als Endergebnis:

$$M_{11} = 2.758 + 6.704 \cdot \sin^2 q_2 + 32.64 \cdot \cos^2 q_2 + 22.18 \cdot \cos q_2,$$

$$M_{12} = M_{21} = 0, M_{22} = 27.74, G_1 = 0, G_2 = 396 \cdot \cos q_2,$$

$$C_{11} = C_{13} = 0, C_{12} = -22.18 \cdot \sin q_2 - 51.87 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_2,$$

$$C_{21} = 25.94 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_2 + 11.09 \cdot \sin q_2, C_{22} = C_{23} = 0$$

und damit:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2^2 \end{pmatrix}$$

b) Werden die Werte für die Gelenkgrößen eingesetzt, erhält man folgende Mat-

$$\text{rixgleichung: } \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.46 & 0 \\ 0 & 27.736 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 22.18 & 0 \\ -11.09 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82.2 \\ 44.39 \end{pmatrix}.$$

Das sind aber die Werte für die Drehmomente in den Gelenken des R6-12 aus dem Beispiel von Abschn. 6.5.2.

c) Mit den angegebenen Werten und den Gln. (6.38, (6.48)- (6.49) erhält man die Form:

$$U_s = \mathbf{M}^*(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{G}^*(q) + \mathbf{C}^*(q) \cdot f_c(\dot{q}) + \mathbf{R}^* \cdot \dot{q}$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 0.01736 & 0 \\ 0 & 0.008681 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3404 & 0 \\ 0 & 0.4859 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{pmatrix} 0.01736 & 0 \\ 0 & 0.008681 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{G}, \mathbf{C}^* = \begin{pmatrix} 0.01736 & 0 \\ 0 & 0.008681 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{R}^* = \begin{pmatrix} 0.00083 & 0 \\ 0 & 0.0015 \end{pmatrix}$$

$$M_{11}^* = 0.38828 + 0.1136 \cdot \sin^2 q_2 + 0.5666 \cdot \cos^2 q_2 + 0.385 \cdot \cos q_2,$$

$$M_{12}^* = M_{21}^* = 0, M_{22}^* = 0.686, G_1^* = 0, G_2^* = -2.857 \cdot \cos q_2,$$

$$C_{11}^* = C_{13}^* = 0, C_{12}^* = -0.385 \cdot \sin q_2 - 0.9 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_2,$$

$$C_{21}^* = 0.187 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_2 + 0.08 \cdot \sin q_2, C_{22}^* = C_{23}^* = 0$$

d) Das maximale Trägheitsmoment um die Gelenkachse 1 ( $M_{11, \max}$ ) tritt dann auf, wenn der Schwerpunkt des Armteils 2 den maximalen Abstand von der Gelenkachse hat. Dies ist aber gerade für  $\theta_2 = q_2 = 0$  der Fall (Bild 2.23). Im Gegensatz dazu wird das minimale Trägheitsmoment auftreten, wenn der Schwerpunkt des Armteils 2 auf der Gelenkachse liegt. Aus Bild L19 kann berechnet werden, dass dies bei  $115.1^\circ = 2.009$  rad der Fall ist. Durch Auswertung von  $M_{11}$  bzw.  $M_{11}^*$  in den Aufgabenteilen b und c erhält man:

$$M_{11,\max} = 57.57, M_{11,\min} = 4.72, M_{11,\max} / M_{11,\min} = 12.19$$

$$M_{11,\max}^* = 1.34, M_{11,\min}^* = 0.4227, M_{11,\max}^* / M_{11,\min}^* = 3.17$$

Das Verhältnis bei Berücksichtigung der Antriebe ist kleiner, da die Trägheitsmomente des Motorankers mit eingehen. Diese Trägheitsmomente sind nicht lageabhängig und erhöhen das Verhältnis zwischen konstanten und lageabhängigen Anteilen.

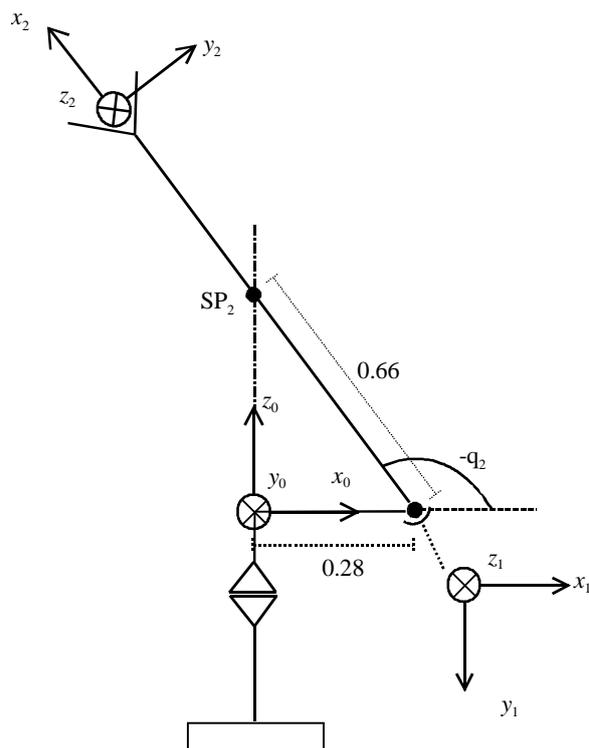


Bild L19: Zu Aufgabe 6.4.2d: Stellung bei der ein minimales Trägheitsmoment bezüglich Gelenk1 wirkt.

### Aufgabe 6.4.3

- a) Es kann vollständig mit einem stationären Zustand gerechnet werden, da der Gravitationseinfluss unabhängig von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist. Alle Gelenkgeschwindigkeiten und Gelenkbeschleunigungen und damit alle Vektoren  $\omega_i$  und  $\dot{\omega}_i$  können zu  $\mathbf{0}$  gesetzt werden. Die Gln. (6.17), (6.18) vereinfachen sich damit zu:

$$\dot{\mathbf{v}}_{i+1} = {}^{i+1}\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{v}}_i$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{s,i+1} = \dot{\mathbf{v}}_{i+1}$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \dot{\mathbf{v}}_0 = -\mathbf{g}$$

$$\mathbf{F}_i = m_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_{s,i}$$

$$\mathbf{f}_i = {}^{i+1}\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{n}_i = {}^{i+1}\mathbf{A} \cdot [\mathbf{n}_{i+1} + ({}^i\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_i) \times \mathbf{f}_{i+1}] + (\mathbf{p}_i + \mathbf{s}_i) \times \mathbf{F}_i,$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = [h_i \cdot \mathbf{n}_i^T + (1 - h_i) \cdot \mathbf{f}_i^T] \cdot {}^{i-1}\mathbf{A} \cdot \mathbf{z},$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{n}_{n+1} \quad .$$

b) Die Durchführung der Berechnung ergibt:  $\tau_1 = 10.392 \text{ Nm}$ ,  $\tau_2 = 2.598 \text{ Nm}$

Sie können die Lösung auch durch entsprechende Eingaben mit NE\_2G oder Mod\_2G erhalten.

#### Aufgabe 6.4.4

Die Eingaben in Mod\_2G wurden bis auf die Denavit-Hartenberg-Parameter und den Werten 0 von Komponenten in den Vektoren  $\mathbf{s}_i$  und  $\mathbf{p}_i$  symbolisch vorgenommen.

Es wurden folgende Parameter eingegeben:

Denavit-Hartenberg Parameter:  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $d_1 = d_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Massen:  $m_1$ ,  $m_2$  (beide symbolisch)

Schwerpunktsvektoren:  $\mathbf{s}_1 = (s_{1x} \ 0 \ 0)^T$ ,  $\mathbf{s}_2 = (s_{2x} \ 0 \ 0)^T$ ,

Trägheitsmomente:  $I_{SP1,x}$ ,  $I_{SP1,y}$ ,  $I_{SP1,z}$ ,  $I_{SP2,x}$ ,  $I_{SP2,y}$ ,  $I_{SP2,z}$  (alle symbolisch),

Reibungskoeffizienten:  $F_{D1}$ ,  $F_{D2}$  (beide symbolisch),

$g$  (symbolisch), Richtung Gravitation:  $(-1 \ 0 \ 0)^T$ ,

externe Einflüsse:  $\mathbf{f}_{ex} = \mathbf{n}_{ex} = (0 \ 0 \ 0)^T$

Im Folgenden die kopierten Ergebnisse. Die Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{C}$  sowie der Vektor  $\mathbf{G}$  wird aus Platzgründen durch Angabe der Einzelkomponenten dargestellt.

$$M11 = ISP1\_z + ISP2\_z + (m2*\sin(q2)^2)/4 + m1*(s1x + 1/2)^2 + m2*(s2x + 1/2)*(s2x + \cos(q2)/2 + 1/2) + (m2*\cos(q2)*(s2x + \cos(q2)/2 + 1/2))/2$$

$$M12 = ISP2\_z + m2*(s2x + 1/2)^2 + (m2*\cos(q2)*(s2x + 1/2))/2$$

$$M21 = M12 = ISP2\_z + m2*(s2x + 1/2)*(s2x + \cos(q2)/2 + 1/2)$$

$$M22 = ISP2\_z + m2*(s2x + 1/2)^2$$

$$G1 = m2*(g*\cos(q1)*\sin(q2) + g*\cos(q2)*\sin(q1))*(s2x + 1/2) - \\ (m2*\sin(q2)*(g*\cos(q1)*\cos(q2) - g*\sin(q1)*\sin(q2)))/2 + \\ (m2*\cos(q2)*(g*\cos(q1)*\sin(q2) + g*\cos(q2)*\sin(q1)))/2 + g*m1*\sin(q1)*(s1x + 1/2)$$

$$G2 = m2*(g*\cos(q1)*\sin(q2) + g*\cos(q2)*\sin(q1))*(s2x + 1/2)$$

$$C11 = 0$$

$$C12 = - (m2*q1*q2*\sin(q2))/2 - m2*q1*q2*s2x*\sin(q2)$$

$$C13 = (m2*\sin(q2))/4 + (m2*s2x*\sin(q2))/2$$

$$C21 = (m2*\sin(q2))/4 + (m2*s2x*\sin(q2))/2$$

$$C22 = 0$$

$$C23 = 0$$

Die Trägheitsmomente

$I_{xx,1} \triangleq I_{SP1,x}$ ,  $I_{yy,1} \triangleq I_{SP1,y}$ ,  $I_{xx,2} \triangleq I_{SP2,x}$ ,  $I_{yy,2} \triangleq I_{SP2,y}$  gehen nicht in die Dynamik ein, da der Roboterarm nur eine Rotationsbeschleunigung in  $z_1 = z_2$  Richtung aufweist.

## Kapitel 7

### Aufgabe 7.9.1

Entsprechend Gl. (7.6) und Gl. (7.9) erhält man für den offenen und geschlossenen Regelkreis:

$$F_{0v}(s) = K_p \cdot \frac{(1+T_N \cdot s)}{T_N \cdot s} \cdot \frac{1}{F_D^* + M^* \cdot s} \approx K_p \cdot \frac{(1+T_N \cdot s)}{T_N \cdot s} \cdot \frac{1}{M^* \cdot s},$$

$$G_v(s) = \frac{(1+T_N \cdot s)}{1+T_N \cdot s + \frac{T_N \cdot M^*}{K_p} \cdot s^2}$$

Mit

$$1+T_N \cdot s + \frac{T_N \cdot M^*}{K_p} \cdot s^2 = 1 + 2 \cdot d_R \cdot T_R \cdot s + T_R^2 \cdot s^2$$

werden durch Koeffizientenvergleich statt Gl. (7.11) die Vorschriften

$$K_p = \frac{2 \cdot d_R}{T_R} \cdot M^*, \quad T_N = 2 \cdot d_R \cdot T_R$$

erhalten.

### Aufgabe 7.9.2

Die Strecke des Geschwindigkeitsregelkreises in Bild 7.5 mit  $z=0$  und  $F_D^*=0$  hat Integrerverhalten. Diese Strecke wird mit Gl. (7.17) verglichen, um die Parameter  $a_0, a_1, a_2$  zu erhalten:

$$F_{St,v}(s) = \frac{1}{M^* \cdot s} \Rightarrow a_0 = 0, \quad a_1 = M^*, \quad a_2 = 0$$

Die Regelparameter des ReDuS-Reglers erhält man dann durch Anwendung von Gl. (7.20):

$$\beta = 0, \quad K_I = \frac{M^*}{T_R^2}, \quad \alpha = \frac{2 \cdot d_R}{T_R} \cdot M^*$$

**Aufgabe 7.9.3**

Vermutlich schwingt die Regelgröße  $v = dq/dt$  auf  $v(t \rightarrow \infty) = 1$  ein. Die Anregelzeit und die Überschwingweite werden grafisch ermittelt:

$$T_{An} \approx 0.098 \text{ s}, \ddot{u} \approx 0.32$$

Die Näherung durch ein P-T<sub>2</sub>-Glied erfolgt über  $d_v, T_v$  nach Gl. (7.28):

$$d_v \approx 0.341, T_v \approx 0.048 \text{ s}$$

Durch die Vorgabe  $\varphi_R = 75^\circ = 1.309 \text{ rad}$  wird mit Gl. (7.35) die Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_D$  zu  $7.2/\text{s}$  und damit berechnet sich nach Gl. (7.36)  $K_L$ :

$$K_L = 6.57 / \text{s}$$

Der Regelfehler bei gleichbleibender Geschwindigkeit lässt sich durch Gl. (7.42) oder mit Hilfe von Bild 7.11 berechnen:  $e_\infty \approx \frac{(1 - K_{Vor}) \cdot v_m}{K_L} \approx \frac{0.2 \cdot 2}{6.57} \approx 0.06 \text{ rad} \approx 3.5^\circ$

**Aufgabe 7.9.4**

Es gilt  $\frac{Q_N(s)}{Q(s)} = \frac{1}{1 + 2 \cdot d_L \cdot T_L \cdot s + T_L^2 \cdot s^2} = \frac{1}{1 + 0.5 \cdot s + 0.0625 \cdot s^2} \triangleq \frac{1}{1 + b \cdot s + a \cdot s^2}$ . Mit Gl.

(7.49) können dann die Parameter ermittelt werden, auf die die Regelparameter einschwingen:

$$K_p \approx \frac{M^*}{a} = 48 \text{ V/rad}, \quad K_v \approx b \cdot K_p - 0 = 24 \text{ V} \cdot \text{s/rad}$$

**Aufgabe 7.9.5**

Nach Gl. (7.58) gilt  $\ddot{q}_i = r_i$  und damit wird das vorgegebene Übertragungsverhalten im Zeitbereich:

$$\ddot{q}_i = r_{0,i} = K_{p,i} \cdot (q_{S,i} - q_i) + K_{I,i} \cdot \int_0^t (q_{S,i} - q_i) d\tau$$

Um das Übertragungsverhalten im Bildbereich aufzustellen, wird obige Gleichung differenziert und man erhält:

$$q_i^{(3)} = K_{p,i} \cdot (\dot{q}_{S,i} - \dot{q}_i) + K_{I,i} \cdot (q_{S,i} - q_i)$$

Nun wird die Laplace-Transformation vorgenommen und nach  $Q_i(s)$  aufgelöst:

$$Q_i(s) = \frac{K_{P,i} \cdot s + K_I}{s^3 + K_{P,i} \cdot s + K_I} \cdot Q_{S,i}(s)$$

Das vorgegebene Übertragungsverhalten ist nicht stabil, also auch nicht geeignet. Die Stabilitätsbedingung ist verletzt, da der Koeffizient von  $s^2$  in der charakteristischen Gleichung  $s^3 + K_{P,i} \cdot s + K_I$  verschwindet.

### Aufgabe 7.9.6

Wie in Beispiel 7.4.8 wird für jedes Gelenk das gleiche dynamische Verhalten eingestellt. Das in diesem Beispiel geforderte P-T<sub>1</sub>-Verhalten für den Geschwindigkeitsregelkreis, lässt sich mit den Parametern  $K_p$  und  $T_N$  über Gl. (7.69) nicht realisieren. Es wird zuerst versuchsweise  $d_R = 1$  und  $T_R = 0.025\text{s}$  vorgegeben. Mit der Gl. (7.71) erhält man dann

$$K_p = 80, \quad T_N = 0.05\text{s}$$

Anschließend wird für den Lageregelkreis  $d_L = 1$  gewählt und mit Gl. (7.32) kann  $K_L$

$$\text{berechnet werden: } K_L = \frac{1}{4 \cdot d_L^2 \cdot T_V} = \frac{1}{4 \cdot d_L^2 \cdot T_R} = 10.$$

Die Simulation wird mit ManDy für diese Lösung und mit der Regelungsstruktur aus Kap. 7.4.8 vorgenommen. Sie unterscheiden sich im Regelungsverhalten nur marginal.

### Aufgabe 7.9.7

- a) Anhand der Bildkoordinaten (in Pixeln) und einer Seitenlänge von  $10\mu\text{m}$  jedes Pixels werden die Koordinaten aus Bild 7.55 in Sensorkoordinaten umgerechnet:

$$\begin{aligned} V &= \left( \frac{150\text{Px}}{100\text{Px}} \right) \cdot 10 \frac{\mu\text{m}}{\text{Px}} = \left( \frac{1.5}{1} \right) \text{mm} \\ V_h &= \left( \frac{450\text{Px}}{200\text{Px}} \right) \cdot 10 \frac{\mu\text{m}}{\text{Px}} = \left( \frac{4.5}{2} \right) \text{mm} \\ V' &= \left( \frac{100\text{Px}}{250\text{Px}} \right) \cdot 10 \frac{\mu\text{m}}{\text{Px}} = \left( \frac{1}{2.5} \right) \text{mm} \\ V'_h &= \left( \frac{200\text{Px}}{250\text{Px}} \right) \cdot 10 \frac{\mu\text{m}}{\text{Px}} = \left( \frac{2}{2.5} \right) \text{mm} \end{aligned}$$

- b) Die Länge der Schraube in Sensorkoordinaten ergibt sich entsprechend Gl. (7.84) jeweils aus der Strecke zwischen den zwei Bildmerkmalen auf der Schraube:

$$d_V = \sqrt{(V_x - V_{hx})^2 + (V_y - V_{hy})^2} = \sqrt{(1.5 - 4.5)^2 + (1 - 2)^2} \text{mm} = 3.16 \text{mm}$$

$$d'_V = \sqrt{(V'_x - V'_{hx})^2 + (V'_y - V'_{hy})^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2.5 - 2.5)^2} \text{mm} = 1 \text{mm}$$

Die Orientierung der Verbindung zwischen  $V$  und  $V_h$  kann mittels der atan2 Funktion beschrieben werden. Siehe auch Bild 7.49:

$$\alpha = \text{atan2}(V_{hy} - V_y, V_{hx} - V_x) = 18.44^\circ$$

$$\alpha' = \text{atan2}(V'_{hy} - V'_y, V'_{hx} - V'_x) = 0^\circ$$

- c) Der Vektor  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_V)$  wird mit Gl. (7.82) aus den Bildmerkmalen  $V_x, V_y$  sowie den beiden Hilfsgrößen  $d_V$  und  $\alpha$  in Abhängigkeit der kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x}_V$  berechnet:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_V) = (V_x, V_y, d_V, \alpha)^T$$

mit  $V_x = \frac{x_V \cdot l}{z_V}, \quad V_y = \frac{y_V \cdot l}{z_V}, \quad d_V = \frac{d_R \cdot l}{z_V}, \quad \alpha = A$

- d) Die Bild-Jacobi-Matrix wird entsprechend Gl. (7.89) aus den partiellen Ableitungen der Bildmerkmale in Abhängigkeit der Bewegung in Kartesischen Koordinaten gebildet:

$$I_V(\mathbf{x}_V) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_V} = \begin{pmatrix} \frac{dV_x}{dx_V} & \frac{dV_x}{dy_V} & \frac{dV_x}{dz_V} & \frac{dV_x}{dA} \\ \frac{dV_y}{dx_V} & \frac{dV_y}{dy_V} & \frac{dV_y}{dz_V} & \frac{dV_y}{dA} \\ \frac{dd_V}{dx_V} & \frac{dd_V}{dy_V} & \frac{dd_V}{dz_V} & \frac{dd_V}{dA} \\ \frac{d\alpha}{dx_V} & \frac{d\alpha}{dy_V} & \frac{d\alpha}{dz_V} & \frac{d\alpha}{dA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{z_V} & 0 & -\frac{10 \cdot x_V}{z_V^2} & 0 \\ 0 & \frac{10}{z_V} & -\frac{10 \cdot y_V}{z_V^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1500}{z_V^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- e) Aus dem Startbild ergibt sich mit den Sensorkoordinaten  $V = \begin{pmatrix} 150\text{Px} \\ 100\text{Px} \end{pmatrix}$  und den Hilfsgrößen  $d_V = 3.16$  und  $\alpha = 18.44^\circ$  mit Gl. (7.83) der Vektor  $\mathbf{x}_V$ :

$$\mathbf{x}_V = \left( \frac{V_x \cdot z_V}{l}, \frac{V_y \cdot z_V}{l}, \frac{d_R \cdot l}{d_V}, \alpha \right)^T = \begin{pmatrix} 71.1 \\ 47.43 \\ 474.34 \\ 18.44^\circ \end{pmatrix}$$

Einsetzen von  $\mathbf{x}_V$  in  $I_V(\mathbf{x}_V)$  führt zur numerischen Bild-Jacobi-Matrix für das Startbild:

$$J_V = \begin{pmatrix} 0.0211 & 0 & -0.0032 & 0 \\ 0 & 0.0211 & -0.0021 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0067 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- f) Um die Differenz zwischen dem Startbild und dem Zielbild zu überwinden wird der folgende Vektor  $\Delta \mathbf{h}$  der Sensorkoordinaten und der entsprechenden Hilfsgrößen benötigt:

$$\Delta \mathbf{h} = \begin{pmatrix} V'_x - V_x \\ V'_y - V_y \\ d'_V - d_V \\ \alpha' - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5\text{mm} \\ 1.5\text{mm} \\ -2.16\text{mm} \\ -18.44^\circ \end{pmatrix}$$

Entsprechend Gl. (7.88) führt die Differenz in Sensorkoordinaten mit Hilfe der inversen Bild-Jacobi-Matrix zu einer Differenz in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta \mathbf{x}_V = J_V^{-1} \cdot \Delta \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 47.43 & 0 & -22.5 & 0 \\ 0 & 47.43 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.5\text{mm} \\ 1.5\text{mm} \\ -2.16\text{mm} \\ -18.44^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.93 \\ 103.59 \\ 324.34 \\ -18.44^\circ \end{pmatrix}$$

- g) Aus den Bildmerkmalen des Zielbildes ergibt sich folgende kartesische Position:

$$\mathbf{x}'_V = \left( \frac{V'_x \cdot z_V}{l}, \frac{V'_y \cdot z_V}{l}, \frac{d'_R \cdot l}{d'_V}, \alpha' \right)^T = \begin{pmatrix} 150 \\ 375 \\ 1500 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Addiert man die kartesische Differenz  $\Delta \mathbf{x}_V$  aus Aufgabenteil f) auf den kartesischen Vektor  $\mathbf{x}_V$  aus Aufgabenteil e) führt dies zu dem folgenden kartesischen Vektor:

$$\mathbf{x}_V + \Delta \mathbf{x}_V = \begin{pmatrix} 71.1 \\ 47.43 \\ 474.34 \\ 18.44^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24.93 \\ 103.59 \\ 324.34 \\ -18.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96.08 \\ 151.02 \\ 798.68 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{x}'_V$$

Die Linearisierung entsprechend Gl. (7.88) gilt nur für **kleine Schrittweiten**. Um die Zielpose auf Basis der Bild-Jacobi-Matrix korrekt einzunehmen, muss die Bewegung in kleinen Schritten durchgeführt werden, wobei nach jedem Schritt die Bild-Jacobi-Matrix neu berechnet werden muss.

Im Folgenden der Source-Code eines Programmes in Matlab, das die Lösung der Aufgabenstellung beinhaltet.

```

clear all
clc

%% Aufgabenteil a)
Px2mm = 10e-3; % Ein Pixel hat die Länge/Breite 10um
Vx = 150 * Px2mm;
Vy = 100 * Px2mm;
Vhx = 450 * Px2mm;
Vhy = 200 * Px2mm;

Vx_ = 100 * Px2mm;
Vy_ = 250 * Px2mm;
Vhx_ = 200 * Px2mm;
Vhy_ = 250 * Px2mm;

%% Aufgabenteil b)
dV = sqrt((Vx-Vhx)^2+(Vy-Vhy)^2)
dV_ = sqrt((Vx_-Vhx_)^2+(Vy_-Vhy_)^2)

alpha = rad2deg(atan2(Vhy-Vy, Vhx-Vx))
alpha_ = rad2deg(atan2(Vhy_-Vy_, Vhx_-Vx_))

%% Aufgabenteil c)
l = 10;
dR = 150;
syms xV_sym yV_sym zV_sym A_sym %symbolische Variablen deklarieren

Vx_sym = xV_sym*l/zV_sym;
Vy_sym = yV_sym*l/zV_sym;
dV_sym = dR*l/zV_sym;
alpha_sym = A_sym;

h_sym = [Vx_sym; Vy_sym; dV_sym; alpha_sym]

%% Aufgabenteil d)
JV_sym = [diff(h_sym, xV_sym), diff(h_sym, yV_sym), diff(h_sym, zV_sym),
diff(h_sym, A_sym)]

%% Aufgabenteil e)
% Kartesische Koordinaten numerisch:
zV = dR*l/dV;
xV = Vx*zV/l;
yV = Vy*zV/l;
XV = [xV; yV; zV; alpha]

%Jacobi Matrix numerisch für das Startbild

```

```
JV = eval(subs(JV_sym, [xV_sym, yV_sym, zV_sym],[xV, yV, zV]))
```

```
%% Aufgabenteil f)
```

```
deltaH = [Vx_ - Vx; Vy_ - Vy; dV_ - dV; alpha_ - alpha]
```

```
JVinv = inv(JV)
```

```
deltaX = JVinv*deltaH
```

```
%% Aufgabenteil g)
```

```
zV_ = dR*/dV_;
```

```
xV_ = Vx_*zV_/l;
```

```
yV_ = Vy_*zV_/l;
```

```
XV_ = [xV_; yV_; zV_; alpha_]
```

```
XV + deltaX
```